Дискретне структуре 2

5. час

Пар задатака из комбинаторике за вежбање:

① На колико начина се 8 истих гумица и 5 различитих бојица може поређати у низ тако да никоје 2 бојице нису једна до друге?

I начин: Најпре поређамо гумице у низ. Оне су исте, па се ово може урадити само на један начин. Ређамо затим бојице: за прву имамо 9 могућих позиција (испред сваке од гумица и иза последње), за другу 8, ..., за пету 5.
Укупно: $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ начина.

II начин: Бојице можемо поређати на $5!$ начина, а затим ређамо гумице. Најпре између сваке две бојице поставимо по гумицу, а онда преостале 4 распоређујемо на 6 позиција, при чему су дозвољена понављања.

$$б_1 \;\square\; б_2 \;\square\; б_3 \;\square\; б_4 \;\square\; б_5$$

6 позиција за преостале гумице

Укупно: $5!\cdot\binom{6+4-1}{4}$

$= 5!\,\frac{9!}{5!\,4!} = 9\,8\,7\,6\,5$

② На колико начина се може формирати ниско од 20 слова из скупа $\{a,b,c,d\}$ т.д.

а) се слова a и b појављују m пута укупно?

Најпре бирамо m позиција за слова a и b: $\binom{20}{m}$ начина

За сваку од одабраних m позиција имамо две могућности (слово a или b), па ове позиције попуњавамо на 2^m начина.

Преосталих $20-m$ позиција попуњавамо на 2^{20-m} начина, јер за сваку од њих имамо по две могућности: слово c или d.

Укупно: $\binom{20}{m}2^m 2^{20-m}$

б) се слово a појављује паран број пута?

Нека се слово a појављује $2k$ пута тачно, $k=0,1,2,\dots,10$.

Најпре бирамо позиције за слово a: $\binom{20}{2k}$ начина.

Scanned with CamScanner

На преосталим местима, којих има $20-2k$, може се наћи било које од слова b, c, d, тј. имамо 3 могућности за свако место, тј. 3^{20-2k} начина да попунимо остатак ниске.

Укупно: $\sum_{k=0}^{10}\binom{20}{2k}\cdot 3^{20-2k}$

3. Снежана, Принц и 7 патуљака желе да седну за округли сто, али тако да Снежана и Принц седе једно до другог, а Лутко и Поспанко један до другог. На колико начина могу то да уреде?

На последњем часу смо показали да n особа може сести за округли сто на $(n-1)!$ начина. Ово ћемо искористити. Замислимо да Снежана и Принц седе на једном двоседу, а Лутко и Поспанко на другом. Сада заправо размештамо 7 "особа" око стола:

$\boxed{СП}$, $\boxed{Л,П}$, патуљци који су преостали – има их 5

Ово се може урадити на $(7-1)!$ начина. Међутим Снежана и Принц се унутар њиховог двоседа могу поређати на 2 начина $\boxed{СП}$, $\boxed{ПС}$. Исто важи и за Лутка и Поспанка.

Укупно: $6!\cdot 2\cdot 2$ начина

4. Колико решења има ј-на: $x_1+x_2+x_3+x_4=30$

$x_1 \geq -1$

$x_2 \geq 3$

$x_3 \geq 0$

$x_4 \geq 2$

На последњем часу смо показали да је број решења ј-не

$x_1+x_2+\dots+x_k=n$

$x_1\geq 0, x_2\geq 0, \dots, x_k\geq 0$ једнак $\binom{n+k-1}{n}$. (*)

Желимо ово да искористимо, али најпре уводимо смене:

1) $x_1 \geq -1 \rightarrow x_1+1\geq 0$

смена: $y_1 = x_1+1$, $y_1\geq 0$

2) $x_2 \geq 3 \rightarrow x_2-3\geq 0$

смена: $y_2 = x_3-3$, $y_2 \geq 0$

3) $x_3\geq 0$ – ово нам одговара

4) $x_4 \geq 2 \rightarrow x_4-2\geq 0$

смена: $y_4 = x_4-2$, $y_4\geq 0$

Scanned with CamScanner

Прелазимо на нове непознате. Полазна ј-на $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ постаје:

$$\overbrace{y_1-1}^{x_1} + \overbrace{y_2+3}^{x_2} + x_3 + \overbrace{y_4+2}^{x_4} = 30$$

тј. $y_1+y_2+x_3+y_4 = 26$

при чему је $y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ y_4\geq 0$.

Према (*) број решења ове ј-не је: $\binom{26+4-1}{26} = \binom{29}{26}$. што је уједно и број решења полазне ј-не.

Функције генератрисе

Деф Степени ред је бесконачна сума облика $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,\ a_i \in \mathbb{R}$

Деф. Нека је $a=(a_0,a_1,a_2\dots)$ низ реалних бројева. Степени ред

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

назива се функција генератриса низа $(a_0,a_1,\dots)$.

пример:

$a=(1,1,1,\dots)$

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} 1\cdot x^i = 1+x+x^2+x^3+\dots = \lim_{n\to\infty} 1+x+x^2+\dots+x^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x^{n+1}\to 0,\ \text{ако } |x|<1$$

$$= \frac{1}{1-x} \quad \text{за } |x|<1$$

Дакле, функција генератриса низа $\boxed{a=(1,1,1,\dots) \text{ је } a(x)=1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}}$

ПАМТИМО ОВО :)

(1) Одредити ф-је генератрисе за низове: 1) $b=(0,1,2,3,\dots)$
2) $c=(0,1,4,9,\dots)$
3) $d=(0,1,8,27,\dots)$

1) $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+\dots = 0\cdot x^0 + 1x^1 + 2x^2+\dots = x+2x^2+3x^3+\dots$

$= x\boxed{(1+2x+3x^2+\dots)} = x\boxed{(1+x+x^2+x^3+\dots)'} = x\,(a(x))'$

Scanned with CamScanner

$b(x) = x\,(a(x))' = x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

2) $c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0\cdot x^0 + 1x^1 + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots$

$= x\,\underline{(1+4x+9x^2+16x^3+\dots)} = x\,\underline{(x+2x^2+3x^3+\dots)'} = x\cdot(b(x))'$

$= x\cdot\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\cdot\frac{x'(1-x)^2 - x((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

3) $d(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = 0x^0 + 1\cdot x^1 + 8x^2 + 27x^3 + 64x^4 + \dots$

$= x\,\underline{(1+8x+27x^2+64x^3+\dots)} = x\,\underline{(c(x))'} = x\cdot\left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right)'$

$= x\,\frac{(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

(2) Одредити ф.г. за низове: $f = (1,0,1,0\dots)$
$g = (0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i = 1+0x+1x^2+0x^3+1x^4+0x^5+\dots = 1+x^2+x^4+x^6+\dots = \{x^2=t\}$

$= 1+t+t^2+t^3+\dots = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-x^2}$

$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$

Сетимо се: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots \quad / \int dx$

$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \int(1+x+x^2+x^3+\dots)\,dx$

$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \left\{\begin{matrix}1-x=t\\ -dx=dt\end{matrix}\right\} = -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t| = \ln\frac{1}{1-x}$ ($1-x \geq 0$ ако $|x|<1$ па $|\cdot|$ није неопходно)

$\int(1+x+x^2+\dots)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = g(x)$

$\Rightarrow g(x) = \ln\frac{1}{1-x}$

За домаћи: Наћи ф.г. за низ $(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots)$

Искористити: $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\dots = 1-x+x^2-x^3+\dots$

Scanned with CamScanner

Уопштена биномна теорема: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots$$

① Наћи коефицијент уз x^4 у развоју $\sqrt[3]{1+x}$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} \underset{\alpha=\frac{1}{3}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} x^k$$

За $k=4$ се добија $\binom{1/3}{4} x^4$, па је тражени коеф: $\binom{1/3}{4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!}$

У задацима ћемо некада користити наредну везу:

$$\boxed{\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}} \quad \Delta$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

② Наћи коефицијент уз x^5 у развоју $(1-2x)^{-2}$.

$$(1-2x)^{-2} = (1+(-2x))^{-2} \underset{\alpha=-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2+k-1}{k}(-2x)^k$$

користимо Δ
$n=2$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k$$

За $k=5$ се добија $\binom{6}{5} 2^5 x^5$, па је тражени коеф: $6 \cdot 2^5$.

Scanned with CamScanner